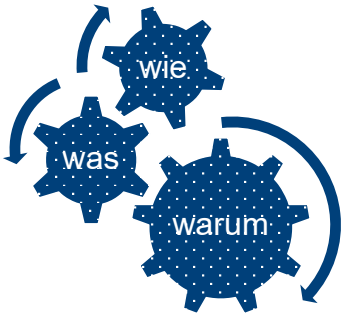
Muster und Strukturen

Muster und Strukturen



Warum Mathematik unterrichten?

Sach-aufgaben
Denken
Geometrische Figuren kennen
brauchbar fürs Leben
Rechnen lernen
Raumvorstellung
Problemlösen
Anwendungs-aufgaben
Muster
Kulturtechnik
Rechen-verfahren
1+1 und 1x1

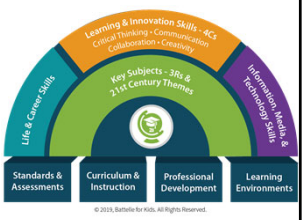
Mathematik macht ein Bildungsangebot ...

- Kenntnisse ... das weiß auch Google ...
- Fertigkeiten ... das kann `ne App ...
- Fähigkeiten

21st Century Skills
Learning and Innovation: The 4 C's

- Critical thinking
  Finding solutions to problems
- Creativity
  Thinking outside the box
- Collaboration
  Working with others
- Communication
  Talking to others

vgl.
https://www.battelleforkids.org/networks/p21



Wir brauchen einen neuen Kanon

Die Welt ist in Unordnung. Wie verständigt sich eine Gesellschaft in Aufruhr? Durch einen gemeinsamen Fundus an Wissen. Machen Sie mit!

VON THOMAS KERSTAN

Die Antwort auf die Frage,
was unsere Kinder heute lernen müssen,
ist ja alles andere als nebensächlich
– nein, sie ist eine Wette auf die Zukunft.
Und die ist offen.

16. AUGUST 2018 DIE ZEIT N° 34

Mathematik sehen und verstehen

Das unsichtbare Abstrakte

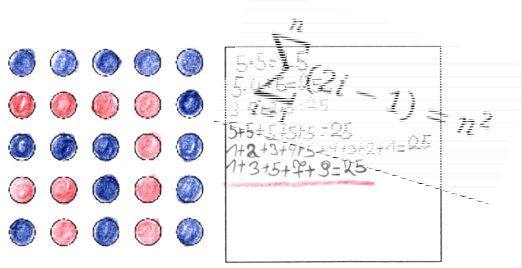
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

But for all mathematics books tend to be awash with symbols, mathematical notation no more is mathematics than musical notation is music. It is in the performance that the music comes alive and becomes part of our experience; the music exists not on the printed page but in our minds. The same is true for mathematics. ... And yet...very obvious difference... It requires no musical training to experience and enjoy music when it is performed....
human beings have developed no mathematical equivalent to a pair of ears.

(Devlin, 1997, S. 3-4)

Devlin, K. (1997). *Mathematics – The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. New York: Scientific American Library.

Das Sichtbare
für mathematische Augen und Ohren ...



Wenn ich jemandem, der keine Mathematik kennt, erzählen will, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

ist, so zeige ich ihm, dass 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, usw. und hoffe, dass er nach dem ‚usw.' verstanden hat, wie es weitergeht.

(Freudenthal, 1973, S. 589)

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett.

Denken fördern

Das Denken in Mustern bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie,
weil viele Einzelfälle mit einem Schlag gemeinsam erfasst werden können.
Unser ganzes kognitives System ist auf Muster ausgerichtet,
denn das Gehirn wäre nicht in der Lage,
jeden Einzelfall gesondert zu behandeln.
Erkennen basiert immer auf Musterbildung.

(Wittmann & Müller, 2007, S. 48).

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.

Muster

- Ordnung, Regelmäßigkeit und Wiederholung, denen eine Vorhersagbarkeit bescheinigt wird (Deutscher, 2012; Akinwunmi & Lüken, 2021; Lüken, 2012; Rathgeb-Schnierer, 2007)
- Die im Phänomen gegebene Regelmäßigkeit erlaubt eine zuverlässige Hypothese, wie das Muster weitergeht bzw. wie eine dieser Ordnung entsprechende Erweiterung aussehen müsste. (Steinweg, 2014)

strukturieren vs. Struktur

*patterning

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).
Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Münster: Waxmann.
Rathgeb-Schnierer, E. (2007). Kinder erforschen arithmetische Muster. *Grundschulunterricht*, 54(2), 11–19.
Steinweg, A. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). Bamberg: University of Bamberg Press (UBP).

Struktur

- *Struktur* wird verstanden als mathematische Eigenschaften und Beziehungen (Relationen), die als Beschaffenheitsmerkmale abstrakter Gedankenobjekte (Mason, 1987) bzw. Noumena (Freudenthal, 1983) die Mathematik selbst definieren. (Schifter, 2018; Mason et al., 2009)
- Mathematische Strukturen beziehen sich auf Merkmale und Eigenschaften, die für jegliche Fälle konstant bleiben.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.
Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewusstheit Einfluss nehmen. *mathematik lehren*,(21), 4–5.
Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10–32.
Schifter, D. (2018). Early Algebra as Analysis of Structure: A Focus on Operations. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (S. 309–327). Cham, CH: Springer International Publishing.

Muster und Strukturen

Muster

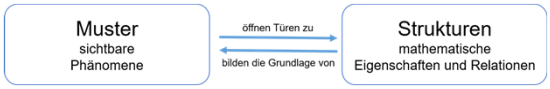
Sichtbare Phänomene, Regelmäßigkeiten

Strukturen

Mathematische Beziehungen, Eigenschaften, Relationen

Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H. Siller, W. Weigel & J. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 39–46). Münster: WTM-Verlag.

Muster und Strukturen



Geklärte Verhältnisse ermöglichen souveräne (Fach)Perspektiven.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Und was heißt das jetzt konkret ...

Muster überall

Pattern is less a topic of mathematics than a defining quality of mathematics itself.
Mathematics 'makes sense'
because its patterns allow us to generalize our understanding from one situation to another.
Children who expect mathematics to 'makes sense'
look for patterns.

(Brownell et al., 2014, S. 84)

Brownell, J., Chen, J.-Q., Ginet, L. (2014). *Big Ideas of Early Mathematics*. Boston u.a.: Pearson.

Strukturen verkörpern

(...) Strukturen kommen streng genommen in der Realität gar nicht vor, sondern sind theoretische Konstrukte, die in die Realität „hineingelesen" werden. (...)
Damit diese Strukturen für die mathematische Bearbeitung zugänglich werden, bedarf es künstlicher Verkörperungen (...).

(Wittmann & Müller, 2007, S. 50)

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.

Mathematik ist ein Spielplatz …

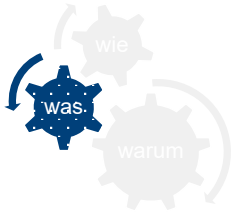
- Eine der besonderen Denkfähigkeiten des Menschen ist es, Zusammenhänge zu analysieren, Systeme zu durchschauen und kritisch zu reflektieren.
- Die Stärke der Mathematik ist, dass sie selbst ein System ist.
- Mathematik ist ein einzigartiges Fach, da die Struktur im Fach verlässlich gegeben ist und sich in Mustern zeigt und erkennen lässt.
- Mathematik bietet damit einen Spielplatz, um das Denken darin zu schulen, Muster zu sehen und die Strukturen zu verstehen.

Mathematisches Argumentieren

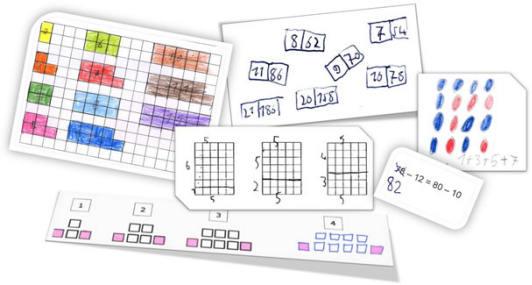
- In der heutigen Welt, wird die Fähigkeit, logische Schlussfolgerungen zu ziehen und Argumente zuverlässig und überzeugend aufzuzeigen, immer wichtiger. Die Mathematik ist eine Wissenschaft mit klar definierten Objekten und Begriffen, die mithilfe von „mathematischem Argumentieren“ auf unterschiedliche Weise analysiert und umgewandelt werden können. Damit können zuverlässige und allgemein gültige Ergebnisse erzielt werden.
- In Mathematik lernen die Schülerinnen und Schüler, dass sie mit folgerichtigem Argumentieren und Annahmen zu Ergebnissen kommen können, auf die sie sich in verschiedenen Alltagssituationen verlassen können. Es ist wichtig, dass diese Schlussfolgerungen objektiv nachvollziehbar sind und keine Bestätigung von externer Stelle benötigen.

https://pisa2022-maths.oecd.org/de/

Auch das noch?!



Vielfalt mathematischer Muster



Arithmetisches Denken – Algebraisches Denken

to do mathematics

- Prozeduren, die unmittelbar durchführbar sind
- numerische Antworten auf Berechnungen
- Zahlen als Mittel in Gleichungen oder als Resultate von Zählprozessen bzw. Anzahlerfassung von Mengen

to think about mathematics

- Konzepte, die sich z.B. in einer Gleichung als Beziehung zwischen Zahlen, Objekten oder Variablen darstellen.
- das Allgemeine der Eigenschaften von Zahlen und Operationen und die mathematischen Beziehungen werden neue Objekte des Denkens

Grundideen algebraischen Denkens

Strukturen und Systeme der Arithmetik und quantitativer Argumentationen / verallgemeinerte Arithmetik	Arithmetik Verallgemeinerungen	verallgemeinerte Arithmetik
	Äquivalenz und Gleichungen	Äquivalenz, Terme, Gleichungen und Ungleichungen
Funktionen	Muster und Funktionen	Funktionales Denken
inner- und außermathematische Anwendungen / Modellierung von Sprache		
Kaput, 2008	Cooper & Warren, 2008	Blanton et al., 2019

Learning through an Early Algebra Progression
LEAP Projekt
Forschungsgruppe
Blanton (USA)

Blanton, M.L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., & Stephens, A., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*,*102*(2), 193–219.
Cooper, T. J., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 23–37.
Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (S. 5–17). New York: Routledge.

Internationaler Vergleich z.B. Big Ideas LEAP (USA)

- Relationales Verständnis von = durch wahr/falsch und offene Gleichungen; Eigenschaft der Äquivalenz von verschiedenen Gleichungen ✓
- Eigenschaften der Operationen (additives/multiplikatives neutrales Element, additives Inverses, Kommutativität ...); ✓
- Klassen von Zahlen (gerade/ungerade); ✓
- Begründen von Verallgemeinerungen (von empirischen zu allgemeinen Argumenten auf der Grundlage von Argumentation mit Darstellungen) ✓
- Relationen zwischen Anzahlen (lineare Funktionen) ✓

(Blanton et al., 2019)

Das machen wir ja alles schon ...

Günstige Bedingungen bewusst nutzen

- Der Mathematikunterricht im deutschsprachigen Raum thematisiert die Inhalte, die im internationalen Vergleich als wesentlich für Muster und Strukturen (algebraisches Denken) angesehen werden.
- Die inhaltlichen Themen werden im deutschsprachigen Raum jedoch *kaum bewusst* Mustern und Strukturen zugeordnet.
- Bewusste unterrichtliche und spielerische Thematisierung kann durch Präzisierung tragfähiger Grundideen unterstützt werden.

Grundideen geben Orientierung

- Die Lehrkräfte müssen mit den Lernenden an den grundlegenden Ideen hinter den Themen arbeiten. (...) explizite Aufmerksamkeit schenken und sich Zeit nehmen für das, was ich Kernbewusstheit nennen würde, oder für die Konzepte an Schnittstellen [neuralgische Lehr-Lern-Situationen].

Mason, J. (2016) In conversation with John Mason. Laurinda Brown interviews John Mason. *Mathematics Teaching*, 254, 42–45.

Muster sehen – Strukturen erkennen

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

- Zahlenspiele, Zahlenmuster und Arithmetikunterricht fördern nicht per se algebraisches Denken, aber es können Optionen erkannt werden.
- In der Natur von Aufgaben zu Mustern und Strukturen liegen also beide Denkweisen, zum einen arithmetische und zum anderen algebraische.
- Wenn Algebra als verallgemeinerte Arithmetik beschrieben wird, dann wird dabei diese Verwobenheit deutlich.

Muster sehen

0 + 5 = 5
1 + 4 = _
2 + 3 = _
3 + 2 = _
_ + 1 = _
_ + _ = _

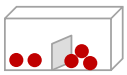
Das Ergebnis ist immer gleich.
Die erste Zahl wird immer größer.
Da ist zwei Mal eine 2 und eine 3.
Die Aufgaben sind Plusaufgaben.
Das Ergebnis ist immer 5.
Es fehlen noch zwei Aufgaben.
Die zweite Zahl wird immer kleiner.

Strukturen erkennen ... in Zahlen

- Verschiedenen Möglichkeiten, 5 in zwei Summanden zu zerlegen. (Partition)

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

5	
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0



Rahmenrichtlinien Kindergarten
...das Kind geht mit gegenständlichen Mengen um, nimmt Objekte weg, fügt sie hinzu, beschreibt und vergleicht die Anzahl von Objekten.
https://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/kindergarten/paedagogische-fachkraefte/rahmenrichtlinien-deutschsprachiger-kindergarten.asp

Strukturen erkennen ... in Operationen

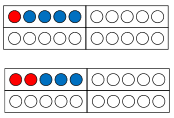
- ... je zwei Aufgaben entdecken, bei denen die Reihenfolge der Summanden getauscht ist

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

Strukturen erkennen ... in Gleichungen

- ... Äquivalenz der Terme durch Konstanz der Addition
- 1+4 und 2+3 sehen nur auf der Ebene der Phänomene völlig anders.
- Konstanz der Addition nutzt das neutrale Element Null
- Eine versteckte Null wird addiert. z.B. 0 = +1 – 1
- 1 + 4 = 1+1 + 4–1 = 2 + 3

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5



Strukturen erkennen ... in Funktionen

- Änderungsverhalten (immer 1 mehr bzw. immer 1 weniger) und die jeweilige Ausgangszahl (0 bzw. 5)
- Folgen als Funktionen
- u.a. *auch* Folge der Ergebniszahl als konstante Folge (Funktion)

0 + 5 = 5
1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
3 + 2 = 5
4 + 1 = 5
5 + 0 = 5

Lern- und Denkentwicklung anregen ...

Everyone who gets to school
has already displayed the powers needed to think algebraically
and to make sense of the world mathematically.
They have all generalised and expressed generalities to
themselves and others. (...)
Furthermore, generalisation, being fundamental to
mathematics, is a part of every mathematics topic.

(Mason et al., 2005, S. iv)

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Paul Chapman Publishing.

Rahmenrichtlinien des Landes (2021 bzw. 2008)

- Über Mathematik sprechen ist Voraussetzung für das Aufbauen eines ausgewogenen Bildes von Mathematik, das auf ein vertieftes Vorstellungsvermögen und Verständnis gründet.
- ... Argumentieren und Kommunizieren [sind] zentrale mathematische Kompetenzen.
- Bei der Entwicklung mathematischen Verständnisses spielen der sprachliche Ausdruck und Interaktionen eine entscheidende Rolle.

https://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/kindergarten/paedagogische-fachkraefte/rahmenrichtlinien-deutschsprachiger-kindergarten.asp
https://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/didaktik-beratung/downloads/Aktualisierte_Fassung_Rahmenrichtlinien_Februar_2021_GS-MS_dt_21.pdf

ReCoDE (recognise-continue-describe-explain)

Re	*recognise*	sehen, hineindeuten, erkennen, bemerken
Co	*continue*	replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren
D	*describe*	mündlich oder schriftlich kommunizieren
E	*explain*	argumentieren, erklären, verallgemeinern

vgl. z.B. Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). Bamberg: University of Bamberg Press (UBP).

Re *sehen, hineindeuten, erkennen, bemerken*

Re Erkennen ✓
Co Fortführen
D Beschreiben
E Begründen

We have no direct access
to what goes on in other people's heads.

(von Glasersfeld, 1991, S. xvi)

Generalizations are the life-blood of mathematics. (...)
Generalizing starts when you sense an underlying pattern,
even if you cannot articulate it.

(Mason, Burton & Stacey, 2010, S. 8)

Glasersfeld, E. von (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer.
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Co *replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren*

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben
E Begründen

- Wie geht es weiter?
- Finde das nächste.
- Finde das 50.
- Finde das 100.

1	2	3	4	5	6	...
2	5	8	11	14	17	20 ...

- Welche Muster passen zusammen? (mathematisch strukturgleich)

z.B. AB-Struktur zweigliedrige Wiederholungseinheit aus zwei Farben, Formen, Größen oder Ziffern:

2, 5, 2, 5, ... ○□○□○□ ... ...

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Waxmann.

Rahmenrichtlinien des Landes für die Festlegung der Curricula (2021)

- die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen sowie Lösungswege reflektieren, beschreiben, begründen und unter Nutzung geeigneter Medien verständlich darstellen und präsentieren (S. 92)

https://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/didaktik-beratung/downloads/Aktualisierte_Fassung_Rahmenrichtlinien_Februar_2021_GS-MS_dt_21.pdf

D *mündlich oder schriftlich kommunizieren*

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen

Erkennen und das Beschreiben
mathematischer Muster (...)
als zwei sich wechselseitig bedingende Prozesse (...)
Beschreiben nicht als der Deutung nachrangiger Prozess
(Akinwunmi, 2012, S. 280)

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Akinwunmi, K. & Lüken, M. (2021). Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?! In A. Steinweg (Hrsg.). *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 10: Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?* (S. 9–24). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).

D *mündlich oder schriftlich kommunizieren*

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen

- Was fällt dir auf?
- Beschreiben des eigenen Denkens.
- Beschreiben der Regelmäßigkeiten / der erkannten Muster.

Beschreiben im Fokus

Ideen nach Link (2012, 2013)

- Markieren und schreiben
- Beschreibungen verbessern
- Finde das Päckchen

Das Zahlenmuster muss so beschrieben werden, dass es einem anderen Kind möglich ist, eine zum Muster passende Aufgabe (z.B. bei der Fortsetzung eines Entdeckerpäckchens) auf der Basis der Beschreibung aufzuschreiben.
(Link, 2013, S. 45)

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
Link, M. (2013). Zahlenmuster beschreiben. *Die Grundschulzeitschrift*, 268/269, 42–46.

Weitere Fördermöglichkeiten

- Wortspeicher
- Sprachliche Vorbilder
- Über Sprache nachdenken

primakom
Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik

https://primakom.dzlm.de/%C3%BCbergreifendes/vielfalt/einstieg-0/unterricht

Sprechen Sie Mathematik?!

Mathematische Sprache

- Keine Angst vor Fachbegriffen in der Arithmetik!
- Summand, Faktor, Differenz ...

Plakative Beschreibung des Terms x^2
„Das ist zum Beispiel drei mal drei.“
„Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter.“
„Ich rechne immer drei mal drei.“
„Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei.“
„Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen.“ Oder „? · ?“

(Akinwunmi, 2011, S. 50)

Akinwunmi, K. (2011). *Zum Verallgemeinern mathematischer Muster und zur propädeutischen Entwicklung von Variablenkonzepten in der Grundschule*, In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 47–50). Münster: WTM.

Rahmenrichtlinien des Landes für die Festlegung der Curricula (2021)

- die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen sowie Lösungswege reflektieren, beschreiben, begründen und unter Nutzung geeigneter Medien verständlich darstellen und präsentieren
- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, Vermutungen entwickeln, Begründungen suchen und nachvollziehen (S. 92)

https://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/didaktik-beratung/downloads/Aktualisierte_Fassung_Rahmenrichtlinien_Februar_2021_GS-MS_dt_21.pdf

E *argumentieren, erklären, verallgemeinern*

Re Erkennen ✓
Co Fortführen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

- Warum ist das so?
- Woher hast du das gewusst?
- Ist das immer so?

Argumente finden …

- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Muster* d.h. auf sichtbare Oberflächenmerkmale
- Verallgemeinerungen mit dem *Fokus auf Strukturen* d.h. auf mathematische Eigenschaften und Beziehungen

(Akinwunmi & Steinweg, 2022)

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

empirische Faktenwissen / Erfahrungen in Lernsituationen

⇕

relational allgemeinen Wissen / mathematische Grundlagen

(Schwarzkopf, 2019, S. 59)

Strukturell-mathematische Argumente sind weitaus schwieriger zu verstehen und zu charakterisieren, insbesondere weil sie sich sprachlich und auf den ersten Blick kaum von den empirisch gestützten Argumenten unterscheiden.

(Schwarzkopf, 2003, S. 232)

Schwarzkopf, R. (2019). Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule: Zur lerntheoretischen Funktion des Argumentierens. In Steinweg, A. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 9: Darstellen und Kommunizieren* (S. 55–68). Bamberg: University of Bamberg Press (ubp).
Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematikdidaktik, 24*(3/4), 211–235.

Paradoxon:

- *symbolische* Darstellungen von Aufgaben verleiten die Kinder an der Muster-Oberfläche zu bleiben und konkrete (numerische) Beispiele zu nutzen,
- während *ikonische oder materialbasierte* Darstellungen die Möglichkeit bieten, eher strukturelle Argumente zu finden.

Darstellungen und Repräsentationen spielen eine entscheidende Rolle für Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf mathematische Strukturen.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Mehrwert Muster & Struktur

- Der Weg von Prozessen zu abstrakten Objekten verbessert unser Verständnis von Mathematik und damit auch das Selbstvertrauen in die eigene mathematische Kompetenz (Sfard, 1991, S. 29).
- Das Verstehen der strukturellen Zusammenhänge schützt davor, dass Missverständnisse oder Unsicherheiten bei den Lernenden zu dem Fehlschluss führen, Mathematik an sich läge schlicht außerhalb ihrer eigenen Kompetenzen und Möglichkeiten: „Those who are not prepared to actively struggle for meaning (for reification) would soon resign themselves to never understanding mathematics" (Sfard, 1991, S. 33)

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.

Mehrwert für arithmetische Kompetenzen

- Der Blick auf allgemeine Beziehungen zwischen den beteiligten Zahlen und auf die Struktur, trägt dazu bei, Rechenmethoden und -strategien besser zu verstehen oder sogar kreativ neue, elegante Rechenwege zu erfinden (Arcavi, Drijvers & Stacey, 2017, S. 4).
- „Algebraisches Denken [ist] eine wesentliche Grundlage für die Entwicklung von flexiblen Rechenfähigkeiten" (Schwarzkopf, 2017, S. 22).
- Die im deutschsprachigen Unterricht übliche Thematisierung von so genannten halbschriftlichen Strategien in der Arithmetik, nutzt genau diese besondere Perspektive auf Strukturen von Zahlen (Zahlenblick, Zahlensinn) und Operationseigenschaften.

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities. Routledge.
Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal Rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, (306), 18–22.

… nicht von allein.

- Algebraische Grundideen bieten fruchtbare Ansätze von Anfang an.
- adäquate Übergangsprozesse entstehen jedoch nicht ohne bewusste Thematisierung und „nicht kraft natürlicher Reifung" (Winter, 1982, S. 199).
- Neben vielen Beispielen von Beziehungen und Eigenschaften benötigen die Kinder auch die explizite Thematisierung dieser Strukturen in alltäglicher Sprache (vgl. Warren, 2003, S. 133).

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122–137.
Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica, 5*(4), 185–211.

Erwartungen und Herausforderungen

an die Lernenden

- ReCoDE von Mustern (Warum-Frage klären)
- Zugang zu allgemeinen Strukturen
- Argumentieren als Prozessziel

Re Erkennen ✓
Co Nutzen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

Erwartungen und Herausforderungen

an die Lernenden

- ReCoDE von Mustern (Warum-Frage klären)
- Zugang zu allgemeinen Strukturen
- Argumentieren als Prozessziel

an Erzieher:innen und Lehrkräfte

- Welche Grundidee (Muster und Strukturen in … *Zahlen, Operationen, Gleichungen, Funktionen*) wird fokussiert?
- Warum ist genau dieses Muster geeignet?
- Welche Darstellungen, Fragen, Begründungshilfen, Repräsentationen, bieten sich zur Unterstützung an?

Re Erkennen ✓
Co Nutzen ✓
D Beschreiben ✓
E Begründen ✓

Mathematik als Denk-Gelegenheit

- Mathematik ist ein großartiges und einzigartiges Fach, da die Struktur im Fach verlässlich gegeben ist und sich in Mustern zeigt und erkennen lässt.
  Das gilt allerdings nicht für jedes Material, jede Schulbuchseite oder Kopiervorlage.
- Immer geeignete Muster anbieten, die Zugang zu mathematischer Struktur erlauben und auf je entsprechendem Niveau der Lernenden begründbar sind.
- Erfahrung ermöglichen, dass es lohnt sich zum *Pattern Seeker* zu werden, und zu erwarten, dass hinter der Tür etwas zu finden ist!

Danke für Ihre Aufmerksamkeit.

Leseverlockungen …

Zum Beispiel:

- *Grundschulmagazin* (2020), Heft 1/20
  Muster und Strukturen
- *Die Grundschulzeitschrift* (2017), Heft 306
  Algebraisches Denken
- *Mathematik differenziert* (2016), Heft 4
  Algebraische Vorstellungen anbahnen
- *Die Grundschulzeitschrift* (2013), Heft 268/269
  Muster und Strukturen

siehe auch

- https://www.uni-bamberg.de/matheinfdidaktik/forschung/publikationen/