



Fakultät für Bildungswissenschaften
Facoltà di Scienze della Formazione
Facoltà de Scienze dla Formazion

Brixen
Bressanone
Pesenon

Vom Messen zum Zahlenstrahl: Ideen zur Erarbeitung und zum Einsatz eines wichtigen Arbeitsmittels (Klasse 2 bis 5)

Workshop am BRIMA – Brixner Mathematiktag für den Primarbereich
22.10. 2022

Michael Gaidoschik
Freie Universität Bozen



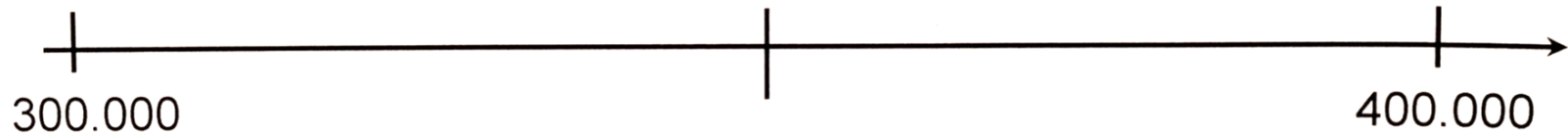
Der Plan für die kommenden 90 Minuten

- Einige Aufgaben an Zahlenstrahlen zum
 - Selbst Lösen und über Lösungsstrategien Reflektieren
 - Diskutieren über deren Sinnhaftigkeit
 - Verdeutlichen, was Kindern schwerfallen kann und warum
- Kurzer Vortrag: Plädoyer für die “Messdeutung” des Zahlenstrahl
- Arbeitsaufträge an Sie zum Ausprobieren:
Vorschläge zur Erarbeitung der Messdeutung
- Schlussrunde: Rückmeldungen zu den Arbeitsaufträgen

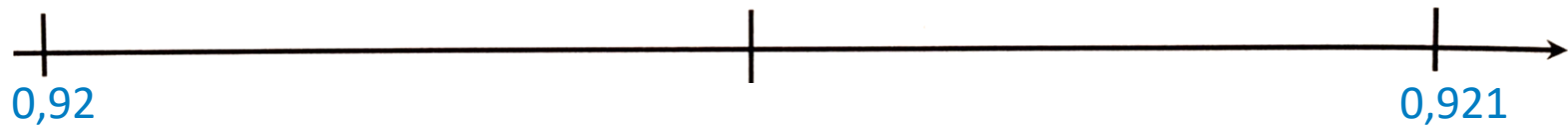
Zum Einstieg einige Aufgaben...

... zunächst für Sie:

Welche Zahl gehört zur Mittelmarkierung?



Falls Sie sich damit grob unterfordert fühlen:

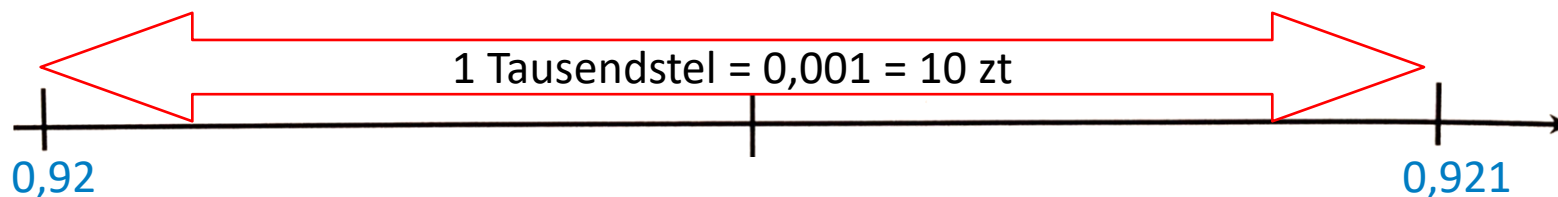
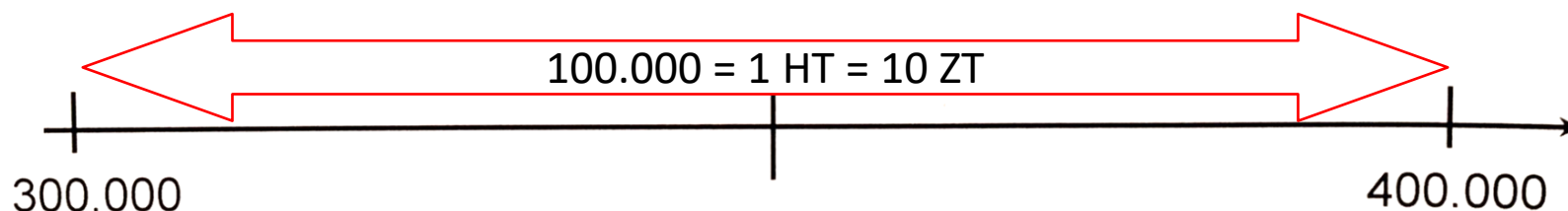


Zum Einstieg einige Aufgaben...

Eine zielführende Strategie:

1) Ermittlung des Gesamt-Abstands

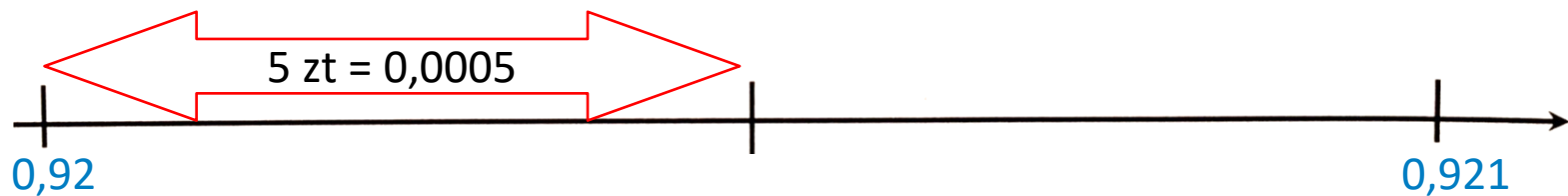
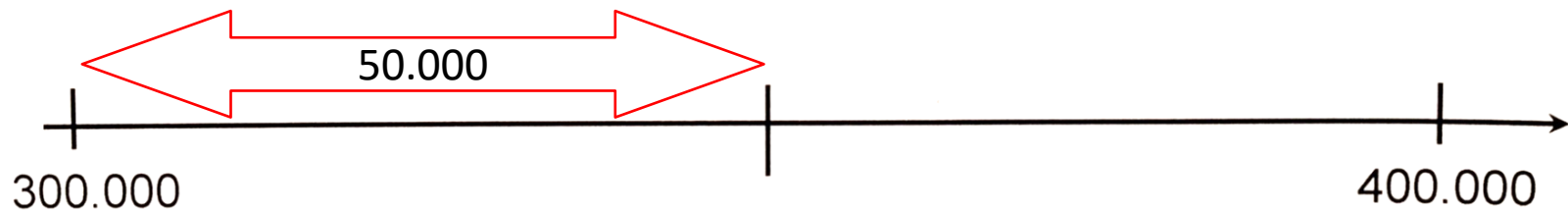
Welche Zahl gehört zur Mittelmarkierung?



Zum Einstieg einige Aufgaben...

2) Ermittlung des halben Abstands

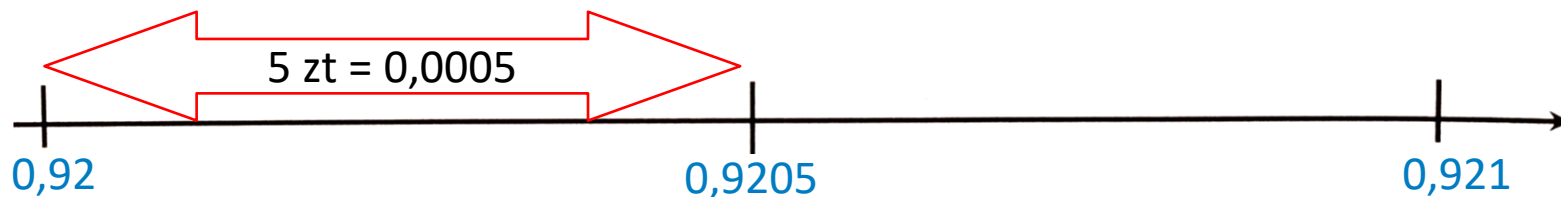
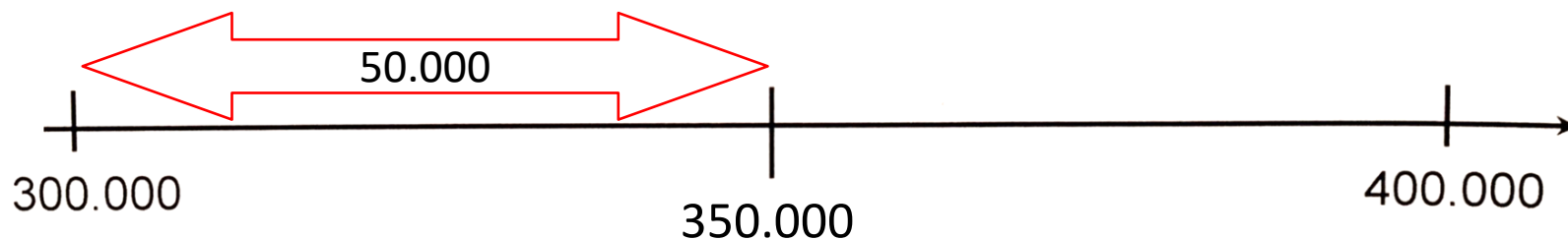
Welche Zahl gehört zur Mittelmarkierung?



Zum Einstieg einige Aufgaben...

3) Addieren des halben Abstands zur kleineren Randzahl

Welche Zahl gehört zur Mittelmarkierung?

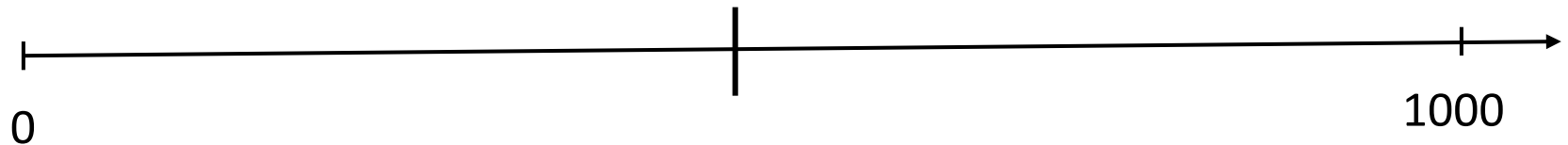


Zum Einstieg einige Aufgaben...

Eine zielführende Strategie:

1) Halbieren der Gesamtstrecke (👉 500)

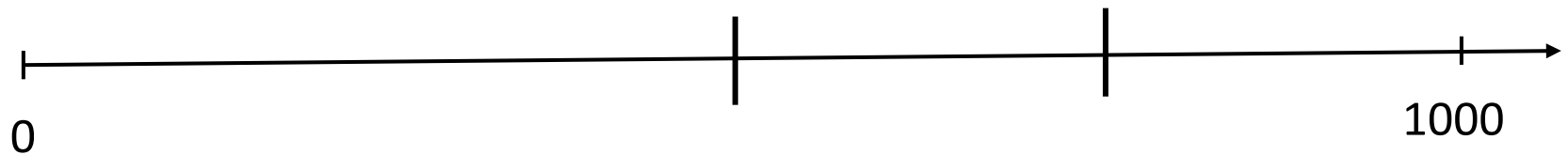
Wo ungefähr muss die Markierung sein für 751?



Zum Einstieg einige Aufgaben...

2) Halbieren der Strecke von 500 bis 1000 (☞ 750)

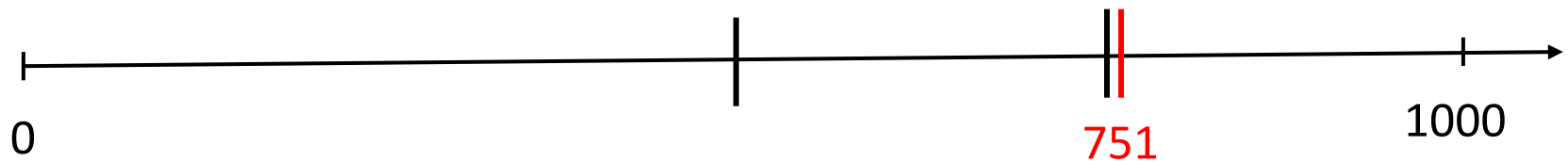
Wo ungefähr muss die Markierung sein für 751?



Zum Einstieg einige Aufgaben...

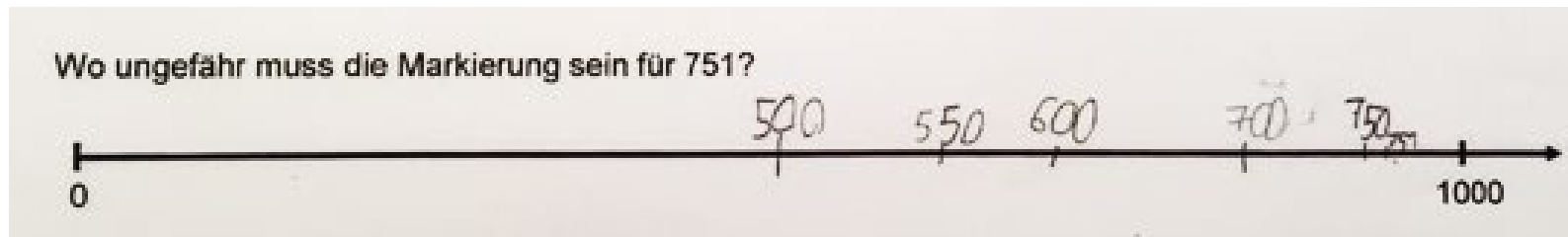
3) ... und noch *ein klein wenig* nach rechts:

Wo ungefähr muss die Markierung sein für 751?

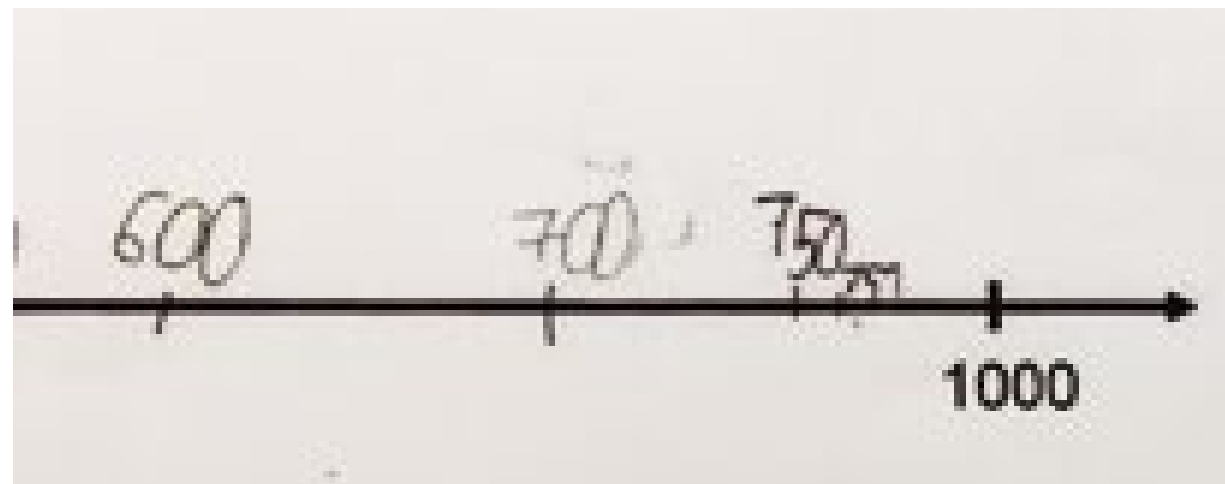


Zum Einstieg einige Aufgaben...

Lösung von Gabriel, Mitte 3. Schuljahr

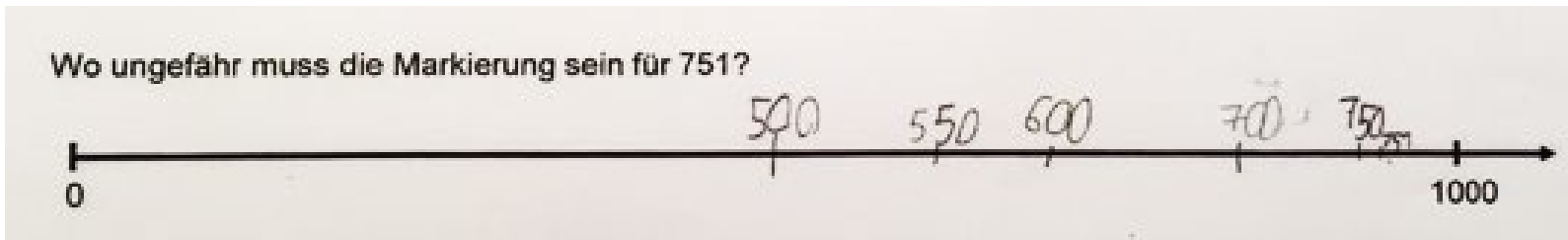


Was macht
 Gabriel richtig,
 was nicht?



Zum Einstieg einige Aufgaben...

Oder ist Gabriels Lösung ohnedies OK?

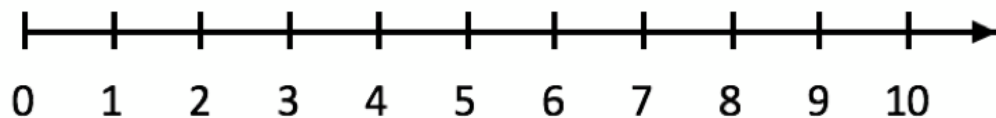


Zum Vergleich:
 Zahlenbuch 4



Exkurs:

Verschiedene Varianten räumlich-linearer Zahldarstellungen...

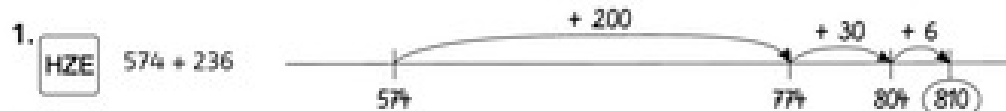


„Vollständig beschrifteter Zahlenstrahl“
 (Krauthausen 2018, S. 322)



Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2015, S. 57):
 „proportionale Zahlenstrecke“

Additionsstrategien



Mathematikus 3

„Rechenstrich“,
 „leerer Zahlenstrahl“
 (z.B. Lorenz 2006)

Gravemeijer (2014) (meine Übersetzung):

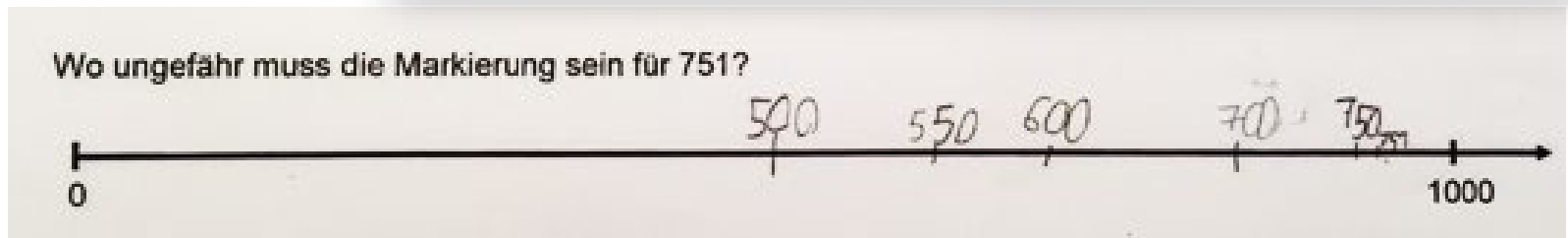
“... der Rechenstrich sollte nicht als proportional betrachtet werden. Denn wenn man sich am Rechenstrich um exakte proportionale Darstellungen bemühen würde, dann würde dies den flexiblen Einsatz des Rechenstrichs behindern.

Zurück zu...

Zahlenbuch 4



Gabriel



- Sind Sie einverstanden damit, dass Proportionalität am Rechenstrich gänzlich unbeachtet bleiben soll (s. Zahlenbuch 4)?
- Meines Erachtens jedenfalls bei Lösungen wie der von Gabriel zu beachten: Auch Konventionen und Erwartungen müssen geklärt werden!

Noch zwei Aufgaben für Sie, in unterschiedlichen Zahlbereichen

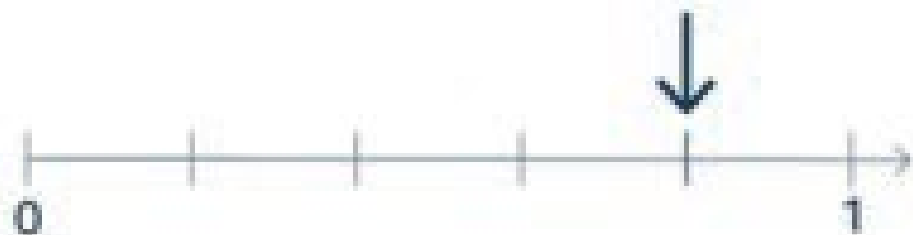
Welche Zahl passt (ungefähr) zur nicht beschrifteten Markierung?



Aus Fromme, 2017

Aufgabe aus ILea plus
 (Schulz & Wartha 2021, S. 37)

Welche Zahl ist markiert?



Aufgabe 1

Aus: Fromme, 2017

Sofies Lösung (2. Klasse):



Aufgabe 2

Welche Zahl ist markiert?



Aufgabe aus ILea plus
(Schulz & Wartha 2021, S. 37)

- Gelöst von 939 Schüler:innen der 6. und 7. Schulstufe
- 42 % richtig
- Häufigster Fehler (16 %): 0,4

Zur Einordnung unserer Einstiegsaufgaben

Mitte bestimmen
zwischen runden
Zahlen

Zahl passend zwischen
runden Zahlen
eintragen

Zu einer Markierung
passende Zahl
bestimmen

- 3 Typen von Aufgaben an Zahlenstrahlen bzw. Zahlenstrecken – welchen Stellenwert haben sie (bislang) in Ihrem Unterricht?
- Was müssen Kinder wissen und können, um bei solchen Aufgaben erfolgreich zu sein?

Welches *Zahl*verständnis fordern & fördern solche Aufgaben?

Mitte bestimmen
zwischen runden
Zahlen

Zahl passend zwischen
runden Zahlen
eintragen

Zu einer Markierung
passende Zahl
bestimmen

- Generell: **In-Beziehung-Setzen von Zahlen**
 - vermittelt über räumliche Beziehungen als *Metaphern* für quantitative Beziehungen
 - größer als „weiter rechts“, „Nähe“, „in der Mitte zwischen“ ...
- Dafür nötig: **Beachten der Stellenwerte**
 - beim Ermitteln von Abständen
 - beim Addieren/Subtrahieren von Abständen
- Vor allem auch: **Entbündeln, Stellenwerte in Beziehung** zueinander setzen
 - beim Halbieren, Vierteln, Zehnteln der ermittelten Abstände

Welches *Zahlenstrahl*verständnis fordern solche Aufgaben?

Mitte bestimmen
zwischen runden
Zahlen

Zahl passend zwischen
runden Zahlen
eintragen

Zu einer Markierung
passende Zahl
bestimmen

- **Abständen** (Längen) müssen **Zahlen zugeordnet** werden
- Zahlen müssen **als Längen** gedeutet werden



Wo ungefähr muss die Markierung sein für 751?



Damit zum angedrohten...

- Einige Aufgaben an Zahlenstrahlen zum
 - Selbst Lösen und über Lösungsstrategien Reflektieren
 - Diskutieren über deren Sinnhaftigkeit
 - Verdeutlichen, was Kindern schwerfällt und warum
- **Vortrag: Plädoyer für die “Messdeutung” des Zahlenstrahl**
- Arbeitsaufträge an Sie zum Ausprobieren:
Vorschläge zur Erarbeitung der Messdeutung
- Schlussrunde: Rückmeldungen zu den Arbeitsaufträgen

Der Zahlenstrahl stellt Zahlen dar – aber wie?

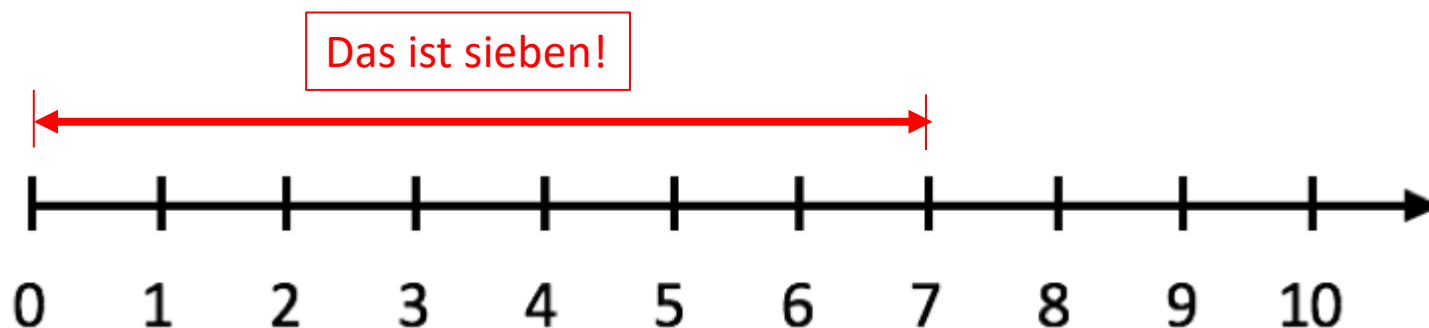
„Vollständig beschrifteter Zahlenstrahl“



- „Jeder natürlichen Zahl entspricht damit [am Zahlenstrahl] ein ganz bestimmter Punkt des Zahlenstrahls, nicht ein Abschnitt bestimmter Länge (Maßzahlaspekt), erst recht nicht der [sic] Anzahl der Punkte bzw. Striche auf dem Zahlenstrahl (Kardinalzahlaspekt).“

(Schipper et al. 2015, S. 63)

Der Zahlenstrahl stellt Zahlen dar – aber wie?



- „Jeder natürlichen Zahl n entspricht ein bestimmter Punkt der Zahlengeraden (Kardinalaspekt).
Länge (Maßzahlaspekt) bzw. Striche auf dem Zahlenstrahl (Ordinalaspekt).“

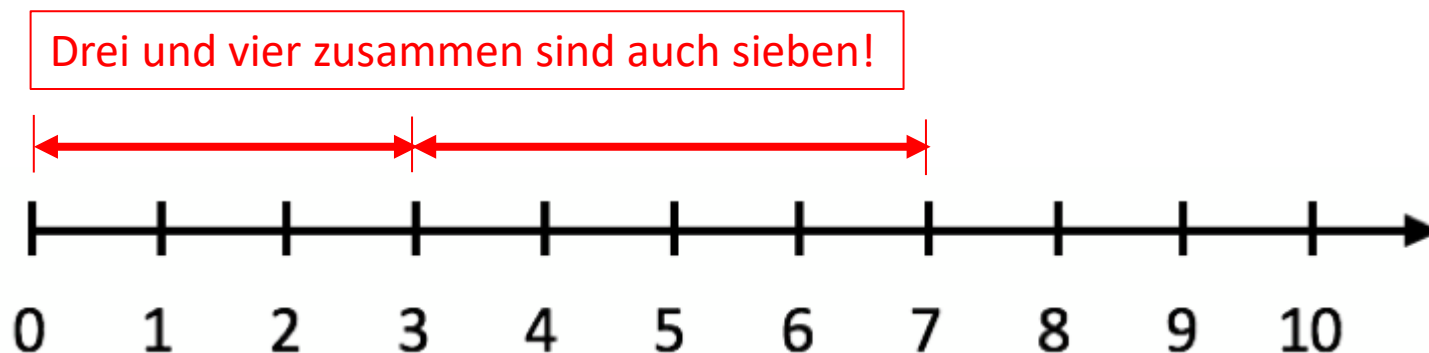
Was spricht gegen diese Deutung als LÄNGE?

(Schipper et al. 2015, S. 63)

Der Zahlenstrahl stellt Zahlen dar – aber wie?



Der Zahlenstrahl stellt Zahlen dar – aber wie?



Der Zahlenstrahl stellt Zahlen dar – aber wie?

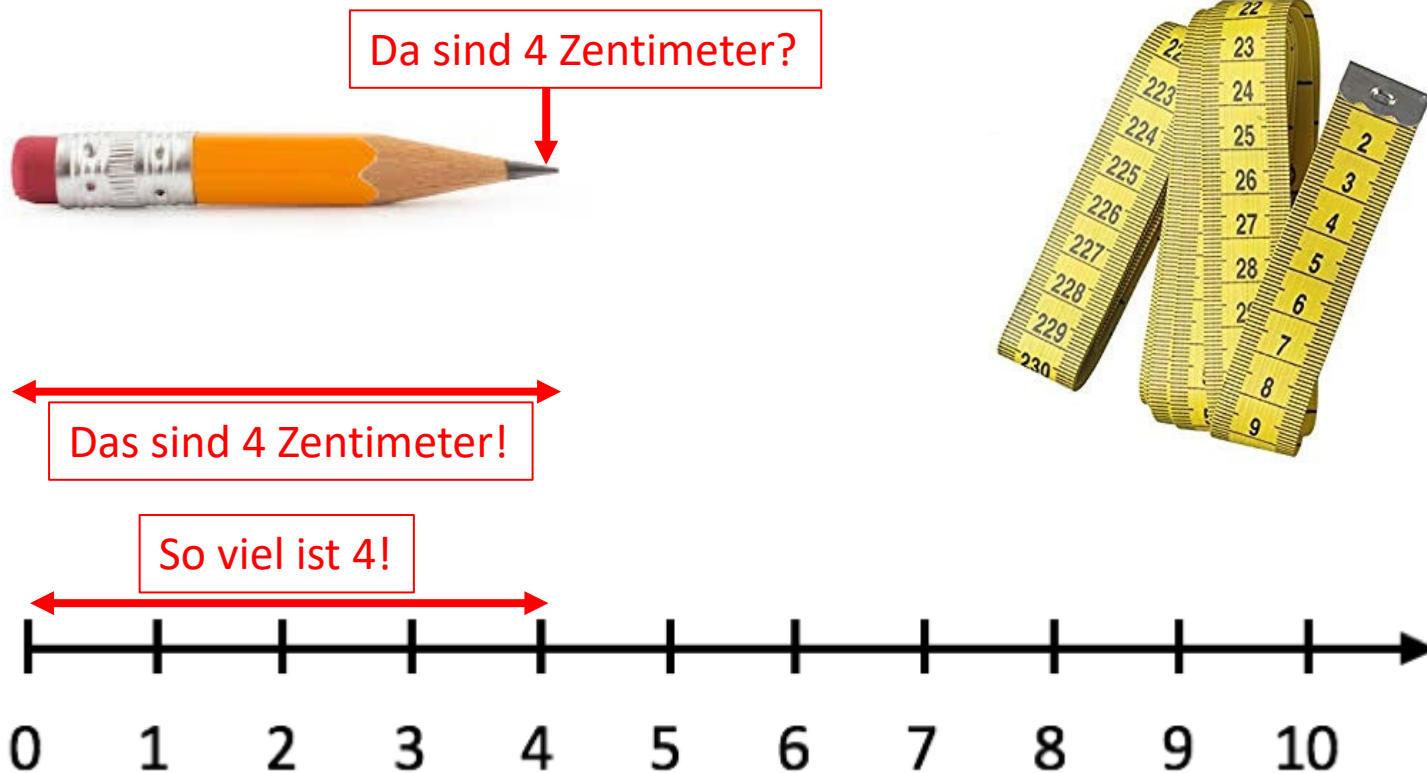
- „Der Zahlenstrahl hat den höchsten Abstraktionsgrad ..., da sich hier besonders viele Zahlaspekte überlagern, nämlich der Maßzahl-, Ordnungszahl-, Kardinalzahl- und Zählzahlaspekt.“

Padberg & Benz (2020)

- „...stete Verknüpfung ordinaler und kardinaler Zahlvorstellungen“

(Götze, Selter & Zanettin 2019, S. 35)

Meines Erachtens treffender: „Mess-Deutung“ von Zahlenstrahl, -strecke, -strich...



Was heißt das für den Unterricht?

- „Mess-Deutung“ des Zahlenstrahls ist wichtig, entspricht aber in der Regel NICHT der intuitiven Interpretation von Kindern
- „Mess-Deutung“ muss daher **gezielt und sorgfältig erarbeitet** werden
- Spezifische Vorteile des Zahlenstrahls gegenüber anderen Zahldarstellungen ergeben sich **erst bei zwei- und v.a. mehrstelligen Zahlen**
- Meine Empfehlung daher: Erarbeitung des Zahlenstrahls mit Mess-Deutung erst im zweiten Schuljahr ...
- ... auf Basis bereits anders erarbeiteter Einsichten in Bündelungs- und Positionsprinzip
- Denn, wie gesehen: Vorstellung eines Zahlenstrahls hilfreich nur, wenn dieser **dezimal strukturiert** ist!

Work für Sie im Workshop:

- Einige Aufgaben an Zahlenstrahlen zum
 - Selbst Lösen und über Lösungsstrategien Reflektieren
 - Diskutieren über deren Sinnhaftigkeit
 - Verdeutlichen, was Kindern schwerfällt und warum
- Vortrag: Plädoyer für die “Messdeutung” des Zahlenstrahl
- **Arbeitsaufträge zum Ausprobieren:
Vorschläge zur Erarbeitung der Messdeutung**
- Schlussrunde: Rückmeldungen zu den Arbeitsaufträgen

„Zahlenstrahl/-strich konsequent und explizit im Sinne des Messens erarbeiten“

Dazu ein Vorschlag:

Wir messen, wie lange es wird, wenn wir 2, 5, viele Zehner aneinanderlegen!



© CanStockPhoto.com



Bis hier
20

Bis hier
 $4Z = 40$

Bis hier
 $8Z = 80$

Bis hier
100

Hier beginne
Ich mit dem
Messen

„Zahlenstrahl/-strich konsequent und explizit im Sinne des Messens erarbeiten“

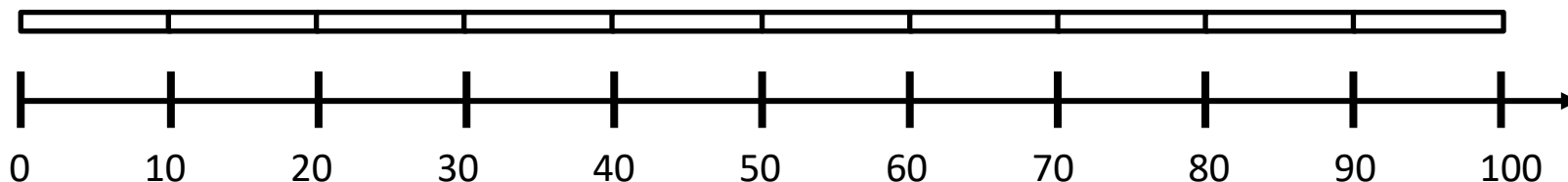
Dazu ein Vorschlag:



© CanStockPhoto.com



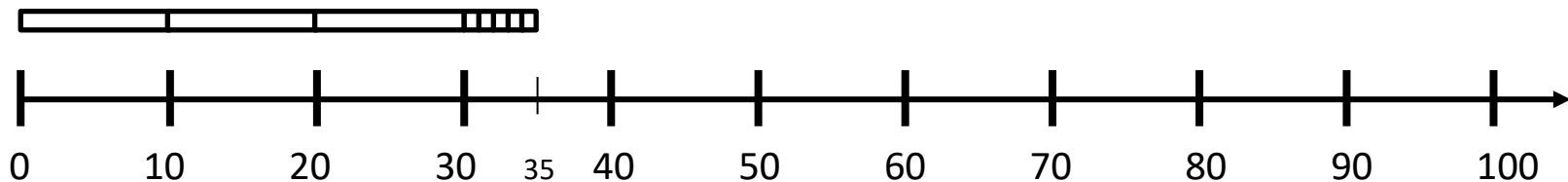
Wir machen ein Zehner-Maßband!



„Zahlenstrahl/-strich konsequent und explizit im Sinne des Messens erarbeiten“

Dazu ein Vorschlag (weitere auf den Kopien):

Wir schätzen zuerst und messen dann genau nach, wie lange es wird, wenn auch noch Einer dazugelegt werden!



Probieren Sie doch selbst (Zweier-Teams)

Auszug aus:
Gaidoschik (in Druck).

Arithmetik
im 2. Schuljahr:
Dezimales
Stellenwertsystem
und halbschriftliches
Addieren & Subtrahieren

- An den hinteren Tischen finden Sie Papierstreifen, Zehnerstangen, Einerwürfel, Stifte, „Doppel-Zahlenstrahlen“ mit Büroklammern zum Einstellen...
- Dazu Kopien mit einigen „Arbeitsaufträgen“
- Probieren Sie aus, was Ihnen davon am interessantesten erscheint!
- Vorschlag: die Grundaufgabe (1) als Basis für das Weitere auf jeden Fall ausprobieren!
- Bei Fragen / Zweifeln zu den Arbeitsaufträgen bitte Hand heben, ich komme zu Ihnen!

Schlussrunde

- Waren für Sie überhaupt neue Vorschläge dabei?
- Wenn ja: Halten Sie diese für tauglich für Ihren Unterricht?
Warum oder was davon? Was davon nicht, und warum nicht?
- Was immer Sie sonst noch mir oder den anderen mitteilen wollen!

Damit ...

Danke für Ihre Aufmerksamkeit
und Ihr Mitmachen!

michael.gaidoschik@unibz.it